האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

<u>בחינה בתורת הקבוצות (80200)</u>

מועד ב' תשס"ד

שם המורה: פרופ' ב. ווייס | **משך הבחינה: שעתיים**

מס' סטודנט: ____________ | **מס' מחבורת: ____**

<u>חלק א:</u> ענה של שתי השאלות הבאות. יש לסמן <u>בטופס הבחינה</u> את התשובה הנכונה.

(כל שאלה 20 נק')

1. במבחן תלמיד כתב הוכחה של משפט קנטור על הקשר בין העוצמות של X ו- $P(X)$.
תוך כדי ההוכחה נמצאו הפסקאות הבאות. ציין אלו מהן נכונות ואלו מהן אינן נכונות.

א. משפט קנטור תקף רק עבור קבוצות אינסופיות.

☐ נכון; ☐ לא נכון

ב. יש התאמה חח"ע ועל בין $P(X)$ לבין הפונקציות מ- X ל- $\{0,1\}$.

☐ נכון; ☐ לא נכון

ג. קיימת העתקה חח"ע מ- X ל- $P(X)$. ☐ נכון; ☐ לא נכון

ד. אם h העתקה מ- X ל- $P(X)$ ונגדיר $A=\{x\in X : x\notin h(x)\}$ אזי $A\in h(X)$.

☐ נכון; ☐ לא נכון

ה. לכל X אין העתקה מ- $P(X)$ על X. ☐ נכון; ☐ לא נכון

2. בהוכחת השקילות בין אקסיומת הבחירה ואכסיומת הסדר הטוב הופיעו מספר טענות ביניים. ציין אלו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות.

א. אם $(A,\le)$ סדורה היטב ו- $B\subset A$ (הכלה ממש) אזי יש $a\in A$ כך ש- $(B,\le)$ שקולה לרישא של a.

☐ נכון; ☐ לא נכון

ב. בקבוצה סדורה היטב $(A,\le)$ יש פונקצית בחירה יחידה על $P(A)\setminus\{0\}$.

☐ נכון; ☐ לא נכון

ג. בכל קבוצה סדורה היטב לכל שרשרת יש חסם עליון.

☐ נכון; ☐ לא נכון

ד. אם f העתקה מ- $P(X)$ ל- X כך שלכל $0\neq A\in P(X)$, $f(A)\in A$
אזי יש סדר טוב על X כך שתמיד $f(A)$ הוא האיבר המינימלי של A.

☐ נכון; ☐ לא נכון

ה. כדי להוכיח שאקסיומת הבחירה נכונה עבור קבוצה X מספיק לדעת שניתן להגדיר סדר טוב על $P(X)$.

☐ נכון; ☐ לא נכון

חלק ב: ענה של 5 שאלות מתוך 6. יש לסמן בטופס הבחינה את התשובה הנכונה

(כל שאלה 4 נק')

1. לכל X,Y,Z קבוצות, אזי $X\times Y\times Z\subseteq P(P(X\cup Y\cup Z))$.

☐ נכון; ☐ לא נכון

2. יהי V מרחב וקטורי מעל Q הרציונלים עם בסיס $\{e_n\}_{n<\omega}$ אזי V בת-מניה.

☐ נכון; ☐ לא נכון.

3. עוצמת קבוצת הפונקציות הגזירות אין-סוף פעמים מ- R לעצמו היא $\aleph$ (עוצמת הרצף).

☐ נכון; ☐ לא נכון.

4. לכל קבוצה סדורה חלקית $(X,\leq)$ אם לכל x הרישא $s(x)$ סדורה היטב אז X סדורה היטב.

☐ נכון; ☐ לא נכון.

5. יהי ω_1 הסודר הראשון שאיננו בן-מניה. קימת סידרה $\{\alpha_n\}_{n<\omega}$ ו- $\alpha_n<\omega_1$ לכל n כך ש- $\lim_{n<\omega}\alpha_n=\omega_1$.

☐ נכון; ☐ לא נכון.

6. יהיו α,β,γ סודרים כך ש- $\beta<\gamma$ אזי $\alpha^\beta<\alpha^\gamma$.

☐ נכון; ☐ לא נכון.

חלק ג: ענה של 5 שאלות מתוך 6. סמן <u>בטופס הבחינה</u> את התשובה הנכונה. (כ"א 8 נק')

1. יהיו $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ סידרה של קבוצות, מהי הטענה הנכונה בהכרח:

☐ i. $\underline{\lim}A_n\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$.

☐ ii. $\underline{\lim}A_n\subseteq\overline{\lim}A_n$.

☐ iii. $\underline{\lim}A_n\supseteq\overline{\lim}A_n$.

☐ iv. $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subseteq\overline{\lim}A_n$.

2. יהיו $f:X\to Y$ ו- $g:Y\to Z$ פונקציות. קבע מהי הטענה שאינה בהכרח נכונה:

☐ i. אם f ו- g חח"ע אזי גם gf חח"ע.

☐ ii. אם f חח"ע ו- g על אזי gf חח"ע.

☐ iii. אם gf חח"ע אזי f היא חח"ע.

☐ iv. אם gf היא על ו- g חח"ע אזי f היא על.

3. יהיו $a>b$ מונים שלפחות אחד מהם אינסופי מה בהכרח נכון:

☐ .i $a+b>a$.

☐ .ii $a\times b\le a$.

☐ .iii $a\times b>a$.

☐ .iv $a^b>a$.

4. יהי a מונה אינסופי ותהי A קבוצה כך ש - $|A|=a$. מה מבין הבאים אינו נכון:

☐ .i קבוצת הסדרות הסופיות של איברים מ- A היא מעוצמה a.

☐ .ii אם Y היא קבוצת כל סדרות הבנות מניה של A אז $|Y|>a$.

☐ .iii קבוצת כל תתי הקבוצות האינסופיות בעוצמה a היא 2^a.

☐ .iv קבוצת כל תתי הקבוצות שהמשלים שלהן הוא מעוצמה a היא 2^a.

5. מה מבין הבאים אינו שקול לאחרים:

☐ .i תהי $(X,\le)$ קבוצה סדורה חלקית לא ריקה, כך שלכל שרשרת $Y\subseteq X$ יש חסם מלעיל ב- X, אזי יש ב - X איבר מקסימלי.

☐ .ii לכל קבוצה סדורה היטב יש סודר השקול לה.

☐ .iii לכל משפחה $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ לא ריקה של קבוצות לא ריקות הקבוצה $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ אינה ריקה.

☐ .iv לכל פונקציה $f:X\to Y$ שהיא על קימת פונקציה g כך ש- $f\cdot g$ היא הזהות על Y.

6. יהיו X,Y קבוצות ויהיו $\{A_i\}$ משפחה של תתי קבוצות של X ו- $\{B_j\}$ משפחה של תתי קבוצות של Y, ותהי $g:X\to Y$ פונקציה בין X ל- Y. מה אינו בהכרח נכון:

☐ .i $g(g^{-1}(\bigcup_j B_j)=g(\bigcup_j g^{-1}(B_j))$.

☐ .ii $g^{-1}(g(\bigcup_i A_i)=\bigcup_i g^{-1}(g(A_i))$.

☐ .iii $g(g^{-1}(\bigcap_j B_j)=g(\bigcap_j g^{-1}(B_j))$.

☐ .iv $g^{-1}(g(\bigcap_i A_i))=\bigcap_i g^{-1}(g(A_i))$.

בהצלחה!